1102
~~250~~ normed ring ニ就イテ II

近藤 基吉

normed ring ニ關スル一ツノ問題ハソノ weak topology ヲ如何ニ定メルカデアル. コレハ normed ring ノ同型問題トモ關連シテ至難デアルが、此処デハ一般ノ linear normed space ニ關スル ring of operators ノ topology ニ倣テ此ノ問題ヲ考ヘテ見タイト思フ。J. v. Neumann ハ Hilbert 空間ニ關スル ring of operators ニ三種類ノ topology — uniform, strong 及ビ weak — ヲ導入シタノデアルが、此ノ考ヘ方ヲ一般ノ ring of operators ノ場合ニ擴ゲルコトが出來ル. 然シ此処デハコノ三種類ノ topology ノ他ニ一種類ヲ加ヘテ四種類ノ topology ヲ考ヘテ置カウ。

§2. Topologies

初メニ ring of operators ノ定義ヲ述ベル. B ヲ linear normed space トスルトキニ、B デ定義セラレ値域が B ニ含マレル有界線型作用素ノ全体カラナル集合ヲ $\mathfrak{L}(B)$ デ示ス. 今ノ $A \in \mathfrak{L}(B)$ ニ對シテ $|Af| \leqq M|f|$ ヲ満タス正數 M ノ下端ヲ $|A|$ デ示シ、A ノ絶對値ト云フ. スルト、ヨク知ラ

シタガッテ $\mathfrak{B}(B)$ ハ単位要素ヲ有スル normed ring トナル。其処デ、$\mathfrak{B}(B)$ ノ algebraic sub-ring ヲ B ニ関スル ring of operators ト名付ケルコトニスル。

今、コレ等ニ次ノ二ツノ topology ヲ導入スル。

I. Uniform topology. Ring of operators R ハ normed ring デアルカラ、§1. ノ方法デ uniform topology ヲ導入スルコトガ出来ル。夫レガ此処デ云フ uniform topology デアル。

$\mathfrak{B}(B)$ ハ uniform topology ニ関シテ完備デアルトハ限ラナイガ、B ガ完備デアレバ $\mathfrak{B}(B)$ モ亦完備トナル。何トナレバ $\{A_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ $\mathfrak{B}(B)$ ノ要素カラナル Cauchy 列トスルトキニ、B ノ各点 f ニ対シテ $\{A_n f\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ又 Cauchy 列デアル。夫レ故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f$ $(=Af$ ト置ク$)$ ガ存在スル。スルト、A ハ B ノ上ノ有界線型作用素デアルカラ $\mathfrak{B}(B)$ ニ含マレ、$\mathfrak{B}(B)$ ハ uniformly complete デアル。

Ring of operators ハ normed ring デアルガ、逆ニ次ノ定理ガ成立ツ。

定理1. R ヲ任意ノ normed ring トスルトキニ linear normed space B ヲ選ンデ R ガ $\mathfrak{L}(B)$ ノ algebraic sub-ring ト isometrically isomorphic デアルヤウニ出来ル。

又, R ヲ代数的単位要素ヲ有スル normed ring トスルトキニ、linear normed space B ヲ選ンデ R ガ $\mathfrak{L}(B)$ ノ単位要素ヲ有スル algebraic sub-ring ト uniformly isomorphic デアルヤウニ出来ル。

証明. R ヲ linear normed space ト考ヘタトキニ, $A \in R$ ニ對シテ、

$$\Phi_A(X) = AX$$

ト置ケバ $|\Phi_A(X)| \leqq |A||X|$ デアッテ, $\Phi_A \in \mathfrak{L}(B)$ トナル. 從ッテ R ガ単位要素 E ヲ含ムトキニハ $\Phi_A(E) = A$ ニ依ッテ $|\Phi_A| = |A|$ ガ得ラレ、更ニ

$$\Phi_A + \Phi_B = AX + BX = (A+B)X = \Phi_{A+B}$$

$$\Phi_A \Phi_B = A(BX) = (AB)X = \Phi_{AB}$$

$$\alpha\Phi_A = \alpha AX = \Phi_{\alpha A}$$

デアルカラ、Φ_A $(A \in R)$ ノ全体カラナル ring of operators ハ R ト isometrically isomorphic デアル。

次ニ、R ガ単位要素ヲ有シナイ場合ヲ考ヘル. §L

トコロデ、R_0 ノ要素 Φ_A ニ R ノ要素 A ヲ對應セシメル寫像ハ algebraic isomorphism デ $|A-B| \leqq |\Phi_A - \Phi_B|\,|E|$ ヨリ uniformly continuous デアル. 夫故ニ §1 ノ補助定理 2 ヨリ R ハ R_0 ト uniformly isomorphic デアル。

次ニ、R ガ uniformly complete デナイトキニハ §1 ノ方法デ R ヲ uniformly complete ニ擴ゲテ置イテ上ノ方法ヲ應用スレバ十分デアル.（證明完了）

（注意） $\Phi_A(X)$ ノ代リニ $\Psi_A(X) = XA$ ヲ考ヘルト

$$\Psi_A + \Psi_B = \Psi_{A+B},\quad \Psi_A \Psi_B = \Psi_{BA},$$

$$\alpha \Psi_A = \Psi_{\alpha A}$$

ガ成立チ、R ガ単位要素 E ヲ含ムトキニハ、$|\Psi_A| = |A|$ ガ得ラレル。從ッテ、Ψ_A ノ全体ハ R ト isometrically anti-isomorphic デアル。又、R ガ代数的単位要素ヲ有スルトキニハ、Ψ_A ノ全体ハ R ト uniformly anti-isomorphic デアル。

$\mathfrak{L}(B)$ ハ F. Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ満タスガ、B ガ可分ナモ $\mathfrak{L}(B)$ ガ uniform topology ニ關シテ可分デアルトハ限ラス。

II. *Strong topology.* $A \in \mathcal{L}(B)$, $f_K \in B$ ($K=1,2,\cdots n$), $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$|(A-X)f_K|<\varepsilon \quad (K=1,2,\cdots n)$$

ヲ滿タス X ノ集合ヲ $\mathfrak{U}(A, f_1 \cdots f_n, \varepsilon)$ デ示シ，A ノ strong vicinity ト云フ。然ルトキニ、$\mathcal{L}(B)$ ハ strong vicinity ニ關シテ Hausdorff 空間デアル。從ッテ又、B ニ關スル ring of operators ハ Hausdorff 空間トナル。コレヲ ring of operator ノ strong topology ト云フノデアル。

strong topology ニ關シテ ring of operators ハ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲミタストハ限ラナイガ、任意ノ正數 ρ ニ對シテ $|A| \leqq \rho$ ヲミタス $\mathcal{L}(B)$ ノ要素 A ノ集合ヲ $\mathcal{L}(B, \rho)$ トスレバ、次ノ定理ガ成立スル。

定理 2. B ガ uniform topology ニ關シテ可分デアレバ、任意ノ正數 ρ ニ對シテ $\mathcal{L}(B, \rho)$ ハ strong topology ニ關シテ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ滿ス。

證明. B デ稠密ナル可附番集合 $\{g_K\}$ ($K=1,2,\cdots$) ヲ取リ、$\mathfrak{U}(A, g_1, \cdots, g_n, \frac{1}{m})$ ($n, m=1,2,\cdots$) ヲ作ル。スルトコレ等ノ作ル A ノ近傍系ハ $\mathcal{L}(B,\rho)$ ニ於イテ A ノ strong vicinity ノ完全系ト對等ニナル。夫レヲ證明スルタメニ、$\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)$ ヲ取ル。

其処デ、$|f_K - g_{\nu_K}| < \frac{1}{3\rho}\varepsilon$ ($K=1,2,\cdots\cdots n$) ヲ満タス g_{ν_K} ($K=1,2,\cdots\cdots,n$) ヲ選ブ。スルト $|(A-X)g_{\nu_K}| < \frac{1}{3}\varepsilon$ ($K=1,2,\cdots\cdots,n$) ヲ満ス. $A, X \in \mathfrak{L}(B,\rho)$ ニ対シテ

$$|(A-X)f_K| \leqq |(A-X)g_{\nu_K}| + |(A-X)(g_{\nu_K}-f_K)|$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + |A||g_{\nu_K}-f_K| + |X||g_{\nu_K}-f_K|$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \rho\frac{1}{3\rho}\varepsilon + \rho\frac{1}{3\rho}\varepsilon = \varepsilon$$

デアルカラ、$\bar{n} > \nu_K$ ($K=1,2,\cdots\cdots,n$), $\bar{m} > \frac{3}{\varepsilon}$ トスレバ

$$\mathfrak{L}(B,\rho)\,\mathfrak{U}(A, g_1, \cdots\cdots, g_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{m}})$$
$$\leqq \mathfrak{L}(B,\rho)\,\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$$

ガ得ラレ、$\mathfrak{L}(B,\rho)$ ハ strong topology ニ関シテ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ満タス（証明完了）

B ガ uniform topology ニ関シテ可分デアッテモ、B ニ関スル ring of operators ハ strong topology ニ関シテ可分トハ云ヘナイ。然シ次ノ定理ガ成立スル。

定理3. B ガ uniform topology ニ関シテ可分デアレバ、$\mathfrak{L}(B)$ ノスベテノ部分集合ハ strong topology ニ関シテ可分デアル。

証明. B デ稠密ナル可附番集合 g_K ($K=1,2,$

------ ）ヲ取ル。其処デ、コノ中カラ互ニ独立ナル

$$g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_K},\ g_{\mu_1} \cdots\cdots g_{\mu_K}$$

ヲ選ビ、$g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_K}$ ニテ張ラレル linear space ($g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_K}$) ヲ作ル。次ニコノ上ニ線型汎函数 $\varphi(f)$ ヲ定義シテ

$$\varphi(g_{\nu_i}) = 0\ (i \neq j),\quad \varphi(g_{\nu_j}) = 1 \qquad |\varphi| = 1$$

ノ成立スル様ニスル。更ニ、コレヲ絶対値ヲ上ゲナイヤウニシテ B 全体ニ拡ゲル。夫ヲ $\varphi_j(f)$ トシ

$$C_j(f) = \varphi_j(f)\, g_{\mu_j},\qquad C(f) = \sum_{j=1}^{K} C_j(f)$$

ト置ク。スルト之ハ $\mathfrak{B}(B)$ ニ属シ

$$C(g_{\nu_j}) = g_{\mu_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots K)$$

デアル。今、此ノヤウナ C ヲ ($g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_K};\ g_{\mu_1} \cdots\cdots g_{\mu_K}$) ノ各々ニ対シテ一ツヅツ定メ、夫レ等ノ全体カラナル集合ヲ $\mathfrak{F}$ トスレバ、$\mathfrak{F}$ ハ可附番デアル。トコロデ、コレハ strong topology ニ関シテ $\mathfrak{B}(B)$ デ稠密デアル。夫ハ次ノ様ニシテ判ル。

今、$\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$ ヲ与ヘル。$\bar{\varepsilon} > 0$ ニ対シテ g_{ν_K} ($K = 1, 2, \cdots\cdots, n$) ヲ選ンデ互ニ独立デ、シカモ $|f_K - g_{\nu_K}| < \bar{\varepsilon}$ ($K = 1, 2, \cdots\cdots, n$) デアルヤウニスル。次ニ g_{μ_K} ($K = 1, 2, \cdots\cdots, n$) ヲ選ンデ $g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_n}$

$g_{\mu_1}, \cdots\cdots, g_{\mu_n}$ ガ独立デ、シカモ $|g_{\mu_K} - Ag_{\nu_K}| < \bar{\varepsilon}$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ デアルヤウニスル。スルト $(g_{\nu_1} \cdots\cdots g_{\nu_n}, g_{\mu_1}, \cdots\cdots g_{\mu_n})$ ニ對應スル $\mathfrak{F}$ ノ要素ガ存在スル.

夫レヲ C ト置ケバ

$$(*) \quad |(A-C)f_K| \leqq |(A-C)g_{\nu_K}| + |(A-C)(g_{\nu_K} - f_K)|$$
$$\leqq |(A-C)g_{\nu_K}| + |A'(g_{\nu_K} - f_K)|$$
$$+ |C(g_{\nu_K} - f_K)|$$

トナル。然レニ

$$|C(f)| \leqq \sum_{j=1}^{n} |C_j(f) \leqq \sum_{j=1}^{n} |g_j(f)||g_{\mu_j}|$$

$$\leqq \left\{\sum_{j=1}^{n} |g_{\mu_j}|\right\} |f|$$

デアルカラ、$\max\limits_{K=1,2,\cdots n} |Af_K| = M$ トスレバ

$$|g_{\mu_j}| \leqq \varepsilon + |Ag_{\nu_j}| \leqq \bar{\varepsilon} + |A||g_{\nu_j} - f_j| + |Af_j|$$
$$< \bar{\varepsilon}(1 + |A|) + M$$

ヨリ

$$|C(f)| < n\{\bar{\varepsilon}(1 + |A|) + M\}|f|$$

トナル。又

$$|(A-C)g_{\nu_K}| = |Ag_{\nu_K} - g_{\mu_K}| < \bar{\varepsilon} \quad (K=1,2,\cdots\cdots,n)$$

デアルカラ，(*) ヨリ

$$|(A-C)f_K|$$
$$\leqq \bar{\varepsilon} + |A|\bar{\varepsilon} + n\bar{\varepsilon}\{\bar{\varepsilon}(1 + |A|) + M\} = K\bar{\varepsilon}$$

が得ラレル。此処デ K ハ常数デアルカラ ε ヲ十分小ニ選ンデ $K\varepsilon < \varepsilon$ トスレバ, $C \in \mathfrak{U}(A, f_1 \text{----} f_n, \varepsilon)$ が成リ立チ, A が strong topology ニ関スル $\mathfrak{F}$ ノ集積点デアルコトが判ル。従ッテ strong topology ニ関シテ $\mathfrak{F}$ ハ $\mathfrak{A}(\mathfrak{Z})$ デ稠密デアル。

次ニ $\mathfrak{L}\text{-}(\mathfrak{Z})$ ノ任意ノ空デナイ部分集合 $\mathfrak{K}$ ヲ考ヘル。$A \in \mathfrak{K}$ ト互ニ独立ナル $g_{\mu_1} \text{-----} g_{\mu_n}$ トニ対シテ $\mathfrak{U}(A, g_{\mu_1} \text{-----} g_{\mu_n}, \frac{1}{m})$ ヲ作リ、コノ中ニ $\mathfrak{F}$ ニ含マレル要素ノ一ツ C ヲ取ル。スルト、$(A, g_{\mu_1} \text{----} g_{\mu_n}, m, C)$ ナル組が得ラレル, 其処デ、$g_{\mu_1} \text{----} g_{\mu_n}, m, C$ ニ対応スル A ノ一ツヲ取ッテ $A_{g_{\mu_1}\cdots, m, C}$ トスル。

然ルトキニ コレ等ノ作ル集合 $\mathfrak{F}_0$ ハ高々可附番デアルが、strong topology ニ関シテコレハ $\mathfrak{K}$ デ稠密デアル。夫レヲ示サウ。

$A \in \mathfrak{K}$ ニ対シテ $\mathfrak{U}(A, f_1 \text{-----} f_p, \varepsilon)$ ヲ与ヘル。其処デ $|f_K - g_{\nu_K}| < \varepsilon$ $(K = 1, 2, \text{----} p)$ ヲ満ス g_{ν_K} $(K = 1, 2, \text{----} p)$ ヲ取ル。然ルトキニハ、$C \in \mathfrak{F}$ デ $|(A - C) g_{\nu_K}| < \varepsilon$ $(K = 1, 2, \text{----} p)$ ナルモノが存在スル 其処デ、$A_{g_{\nu_K}, \varepsilon, C}$ $(= A_0$ ト置ク) ヲ取レバ

$$\begin{aligned}
|(A_0 - A) f_K| &\leqq |(A_0 - A) g_{\nu_K}| + |(A_0 - A)(g_{\nu_K} - f_K)| \\
&\leqq |(A_0 - C) g_{\nu_K}| + |(C - A) g_{\nu_K}| \\
&\quad + |(A_0 - A)(g_{\nu_K} - f_K)| \\
&< (2 + |A_0| + |A|)\varepsilon
\end{aligned}$$

デアルカラ、$\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{B}(B, \rho)$ デアレバ $|(A_0 - A)f_K| < 2(1+\rho)\varepsilon$ ガ得ラレ、*strong topology* ニ関シテ $\mathfrak{F}_0$ ハ $\mathfrak{M}$ デ稠密デアル。次ニ $\mathfrak{M}$ ガ有界デナイトキニハ、コレヲ有界ナルモノノ可附番個ノ和トナシ得ル故ニ コノ場合モ *strong topology* ニ関シテ $\mathfrak{F}_0$ ハ $\mathfrak{M}$ デ稠密デアル。

III. *Feeble topology* $A \in \mathfrak{B}(B)$, $\Phi_K \in \overline{\mathfrak{B}(B)}$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$, $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$|\Phi_K(A - X)| < \varepsilon \quad (K=1,2,\cdots\cdots n)$$

ヲミタス X ノ集合ヲ $\mathfrak{U}(A, \Phi_1, \cdots\cdots \Phi_n, \varepsilon)$ ニテ示シ A ノ *feeble vicinity* ト云フ。スルト, $\mathfrak{B}(B)$ ハコノ近傍系ニ関シテ Hausdorff 空間ヲナス。B デ閉スル *ring of operators* ニ對シテモ同様デアル。コノ *topology* ヲ *feeble* ト名付ケルコトニスル。

Feeble topology ハ *strong topology* ト共ニ *uniform topology* ヨリモ弱イガ、*feeble topology* ト *strong topology* トハ比較ガ出来ナイ。何トナレバ、S. Mazur ノ定理ヨリ *uniform topology* ニ関シテ閉デタ凸集合ハ *feeble topology* ニ関シテモ閉デテ居ル。トコロデ、其ノヤウナ凸集合ノ中ニ *strong topology* ニ関シテ閉デテ居ナイモノガアル。実際、$\mathfrak{B}(B)$ ノ *sub-ring* デアッテ

strong topology ニ関シテ閉ヂテ居ラナイモノヲ作ルコトが出来ル。

一方、$\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ ノ部分集合 $\mathfrak{K}$ デ feeble topology ニ関スル集積点ガ strong topology ニ関シテサウデナイモノガアル。夫レハ次ノ様ニシテ與ヘラレル。$\mathfrak{B}$ ノ要素 f_n $(n=1,2,\ldots\ldots)$ ヲ選ンデ weakly ニ 0 ニ収斂スルガ uniformly ニ 0 ニ収斂シナイ様ニスル。次ニ、$\varphi \in \bar{\mathfrak{B}}$ ニ對シテ

$$A_g(f)=\varphi(f)g$$

トスル。明ラカニ $A_g \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ デアル。今 A_g ノ全体カラナル集合ヲ $\mathfrak{K}$ トスレバ $|A_g|=|\varphi||g|$ トナリ $\mathfrak{K}$ ハ uniform topology ニ関シテ閉デアル。其処デ、$\Phi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ トスレバ、Φ ハ又 $\mathfrak{K}$ ノ上ノ linear functional デアル。従ッテ $\mathfrak{B}$ ノ上デ

$$\psi(g)=\Phi(A_g)$$

トスレバ、$|\psi| \leqq |\Phi||A_g| \leqq |\Phi||\varphi||g|$ ガ得ラレ、$\varphi(g)$ ハ有界デアル。従ッテ、$f_n \to 0$ weakly ヨリ $\varphi(f_n) \to 0$ ヨリ $\Phi(A_{f_n}) \to 0$ デアル。即チ、$A_{f_n} \to 0$ feebly ガ成立スル。然シ、一方ニテ $|A_{f_n}|=|\varphi||f_n| \to 0$ デハナイ。即チ、$A_{f_n} \to 0$ strongly デハナイ。

又、feeble topology ニ関シテ ring of operators R ハ Hausdorff ノ第一可附番性

公理ヲミタストモ限ラナイシ，又 B が可分デアッテモ R が feeble topology ニ関シテ可分トハ云ハレナイ。

IV. *Weak topology.* 此処デ上デ與ヘタイヅレノ topology ヨリモ更ニ弱イモノヲ考ヘヨウ。

$A \in \mathfrak{R}(B)$, $f_K \in B$, $\varphi_K \in \overline{B}$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$|\varphi_K((A-X)f_K)|<\varepsilon \quad (K=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ヲミタス X カラナル集合ヲ $\mathfrak{U}(A,f_1,\cdots\cdots,f_n,\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_n,\varepsilon)$ デ示シ A ノ weak vicinity ト云フ。シカルトキニ、$\mathfrak{R}(B)$ ハコレニ関シテ Hausdorff 空間ヲナシテ居ル。B ニ関スル ring of operators ニ対シテモ同様デアル。コレヲ B ニ関スル ring of operators ノ weak topology ト名付ケル。

先ヅ Hausdorff ノ第一可附番性公理ニ関シテ次ノ定理ガ成立ツ。

定理4. $\overline{B}$ ガ uniform topology ニ関シテ可分デアレバ、任意ノ正数 ρ ニ對シテ $\mathfrak{R}(B,\rho)$ ハ weak topology ニ関シテ Hausdorff ノ第一可附番性公理ヲ満ス。

証明. $\overline{B}$ ガ uniform topology ニ関シテ可

分デアルカラ、Bモ亦 uniform topology ニ関シテ可分デアル。今、φ_K, ψ_K (K = 1, 2, ……) ヲ夫々 B, $\overline{B}$ ニテ稠密ナル可附番集合トスル。其処デ $\mathfrak{U}(A, f_1, \cdots\cdots, f_n, \varphi_1, \cdots\cdots \varphi_n, \varepsilon)$ ヲ含マレル $\mathfrak{U}(A, g_{\mu_1}, \cdots\cdots g_{\mu_n}, \psi_{\nu_1}, \cdots\cdots \psi_{\nu_n}, \delta)$ ノ存在スルコトヲ示サウ。正数 δ ニ對シテ

$$|f_K - g_{\mu_K}| < \delta, \ |\varphi_K - \psi_{\nu_K}| < \delta, \ |\psi_{\nu_K}((A-X)g_{\mu_K})| < \delta$$

$$(K) = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

トスルトキニ $A, X \in \mathfrak{S}(B, \rho)$ ヨリ

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_K((A-X)f_K)| \\
&\leqq |\psi_{\nu_K}((A-X)g_{\mu_K})| + |\varphi_K((A-X)f_K) - \psi_{\nu_K}((A-X)g_{\mu_K})| \\
&< \delta + |\varphi_K((A-X)f_K) - \varphi_K((A-X)g_{\mu_K})| \\
&\qquad + |\varphi_K((A-X)g_{\mu_K}) - \psi_{\nu_K}((A-X)g_{\mu_K})| \\
&\leqq \delta + |\varphi_K|\,|A-X|\,|f_K - g_{\mu_K}| + |\varphi_K - \psi_{\nu_K}|\,|A-X|\,|g_{\mu_K}| \\
&< \delta + 2|\varphi_K|\rho\delta + 2\rho\delta(|f_K| + \delta) < c\delta
\end{aligned}
$$

トナルカラ、δ ヲ $c\delta < \varepsilon$ ノ成立スルヤウ一選ベバ十分デアル。（証明完了）

次ニ、weak topology ニ関スル $\mathfrak{S}(B)$ ノ可分性ハ strong topology ニ関スル $\mathfrak{S}(B)$ ノ可分性ヨリ明ラカデアル。即チ、定理3ニヨツテBが uniform topology ニ関シテ可分デアレバ $\mathfrak{S}(B)$

ノ凡ベテノ部分集合ハ weak topology ニ関シテ可分トナル。

又, weak topology ニ関シテハ次ノ定理ガ成立ツ。

定理5. B ガ locally weakly bicompact ノトキニハ、$\mathfrak{L}(B)$ ハ又 weak topology ニ関シテ locally bicompact デアル。

証明. $|f| \leqq 1$ ヲ満スBノ要素 f ノ集合ヲ B_0 トスレバ、B_0 ハ勿論 weakly bicompact デアル. 其処デ $B_0^{(f)}(=B_0)\ (f \in B_0)$ ノ直積

$$B_0^{*}=\prod_{f \in B_0} \otimes\ B_0^{(f)}$$

ヲ作ル. $A \in B_0^{*}$ ノトキニハ $B_0^{(f)}$ ニ於ケル A ノ成分ヲ $A^{(f)}$ デ示スコトニスル。從ッテ、$A^{(f)} \in B_0^{(f)}$ トナル。

今, $\varphi_K \in \overline{B}$, $f_K \in B_0$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ ニ對シテ

$$|\varphi_K(A^{(f_K)}-X^{(f_K)})|<\varepsilon \quad (K=1,2,\cdots\cdots n)$$

ヲ満タス $X \in B_0^{*}$ ノ集合ヲ $\bar{A}$ ノ近傍ト定義スル。スルト, A. Tychonoff ノ定理ニヨッテ B_0^{*} ハ bicompact デアル。

次ニ, $\mathfrak{L}(B,1)$ ノ任意ノ要素Aニ対シテ $|A| \leqq 1$ デアルカラ B_0^{*} ニ含マレル要素 $\bar{A}$ ヲ求メテ

$$\overline{A}^{(f)} = A(f) \quad (f \in B_0)$$

デアルヤウニ出来ル。$A = \overline{A}$ ヲ對應セシメル對應ヲ考ヘルト $\mathfrak{S}(B, 1)$ ノ要素ハ一對一ノ仕方デ B_0^* ノ部分集合 —— コレヲ $\mathfrak{S}$ ニテ示ス —— ニ寫サレル。トコロデ、$\mathfrak{S}(B, 1)$ ノ weak topology ト $\mathfrak{S}$ ノ topology トハ同等デアルカラ、$\mathfrak{S}(B, 1)$ ト $\mathfrak{S}$ トノ對應ハ位相的デアル。

然ルニ B_0^* ニ於イテ $\mathfrak{S}$ ハ閉集合デアル。何トナレバ、$P \in B_0^*$ ガ $\mathfrak{S}$ ノ集積點デアレバ，$\varphi_K \in B, f_K \in B_0$ $(K = 1, 2, \cdots, n)$，$\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$|\varphi_K(P^{(f_K)} - \overline{X}^{(f_K)})| < \varepsilon, \quad \overline{X} \in \mathfrak{S}$$

ヲ滿足スル $\overline{X}$ ガ存在スル。$\varepsilon = \frac{1}{n}$ ニ對シテコノ樣ナ $\overline{X}$ ノ一ツヲ $\overline{X}_n$ トスレバ，$\varphi_K(\overline{X}_n^{(f_K)}) \longrightarrow \varphi_K(P^{(f_K)})$ ガ成立ツ。今，特ニ $\varphi_K = \varphi$，$f_1 = f$，$f_2 = g$，$f_3 = f + g$ トスレバ

$$\begin{aligned}
&\varphi(P^{(f+g)}) - \varphi(P^{(f)}) - \varphi(P^{(g)}) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left\{ \varphi(\overline{X}_n^{(f+g)}) - \varphi(\overline{X}_n^{(f)}) - \varphi(\overline{X}_n^{(g)}) \right\} \\
&= \lim_{n \to \infty} \varphi\left\{ \overline{X}_n^{(f+g)} - \overline{X}_n^{(f)} - \overline{X}_n^{(g)} \right\}
\end{aligned}$$

トナル。トコロデ，$\overline{X}_n^{(h)} = \overline{X}_n(h)$ デアルカラ

$$\begin{aligned}
&\overline{X}_n^{(f+g)} - \overline{X}_n^{(f)} - \overline{X}_n^{(g)} \\
&\qquad = X_n(f+g) - X_n(f) - X_n(g) = 0
\end{aligned}$$

ガ成立チ、$\varphi(P^{(f+g)})=\varphi(P^{(f)})+\varphi(P^{(g)})=\varphi(P^{(f)}+P^{(g)})$デアル。$\varphi$ハ$\overline{B}$ノ任意ノ要素デアルカラ

$$P^{(f+g)}=P^{(f)}+P^{(g)}$$

トナル。同様ニ

$$\alpha P^{(f)}=P^{(\alpha f)}$$

ガ得ラレル。又、$\varphi(P^{(f)})=\lim_{n\to\infty}\varphi(X_n(f))$、$|X_n|\leqq 1$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ニ依ッテ

$$|\varphi(P^{(f)})|=\lim_{n\to\infty}|\varphi(X_n(f))|$$

$$\leqq\overline{\lim_{n\to\infty}}|\varphi||X_n||f|\leqq|\varphi||f|$$

デアル。夫レ故ニ$|\varphi|=1$, $|\varphi(P^{(f)})|=|P^{(f)}|$トスレバ、$|P^{(f)}|\leqq|f|$トナル。従ッテ、$P=\overline{Q}$ナルQガ存在シナケレバナラナイ。即チ、$P\in\mathfrak{S}$ガ得ラレ、$\mathfrak{S}$ハ$B_0^*$ノ閉集合デアル。コレヨリ$\mathfrak{S}$或ヒハ$\mathfrak{S}(B,1)$ノbicompactナルコトガ知ラレル。（証明完了）

以上ガring of operatorsニ関スル四種類ノtopologyデアルガ、任意ノnormed ring Rハ適当ニ選バレタlinear normed space BニIIスルring of operators R_0トuniformly isomorphicデアルカラ、R_0ニ関スル上記ノtopologyヲ以テRノtopologyトスルコトガ出来ル。

コノ中デ uniform ト feeble topology トハ B ノ選擇ニ關係シナイモノデアル。夫レ故ニ，コレヲ R ノ uniform 及ビ feeble topology ト名付ケ、コレニ對シテ strong ト weak topology トハ B ニ關係スルカラ、夫レヲ R ノ B-strong 及ビ B-weak topology ト名付ケル。勿論、後ノ二ツハ $\mathfrak{R}(B)$ ノ algebraic sub-ring ノ取リ方ニ關係スルガ、簡單ノタメニコノヤウニ呼ブコトニスル。

尚．normed ring R ニ導入サレル uniform, feeble B-strong 及ビ B-weak topology ヲ簡便ニ (u)-，(f)-，(s_B)-及ビ (w_B)-topology ト云ヒ，又此等ノイヅレ一ツヲ代表的ニ (τ)-topology デ示スコトニスル。